

# Homologie des Complexes Simpliciaux

MALLET-BURGUES Louis

23 mai 2022

## Résumé

On s'intéresse à la traduction algébrique de certaines propriétés topologiques des complexes simpliciaux au travers de leurs groupes d'homologie, et on démontre un résultat d'invariance de ces objets par homotopie simpliciale. On applique ensuite la théorie au cas des sphères, et on propose des méthodes algorithmiques pour calculer l'homologie d'un complexe simplicial. Ces algorithmes sont implémentés dans un programme dont on présente quelques résultats en annexe. L'annexe contient de surcroît les démonstrations des résultats présentés, pour ne pas alourdir le texte principal.

## 1 Définitions préalables

Dans tout le document,  $\mathbb{A}$  est un anneau commutatif (unitaire) non nul.

**Définition 1.** Un **complexe simplicial abstrait fini**  $K$  (abrégé en complexe simplicial par la suite) est la donnée d'un ensemble fini  $V(K)$ , de sommets, et pour tout  $n \in \mathbb{N} \sqcup \{-1\}$  d'un ensemble fini  $F_n(K)$  de parties de  $V$  à  $n+1$  éléments, les faces de dimension  $n$ . On demande de plus que toute partie d'une face de  $K$  soit une face de  $K$ , et que la réunion des faces de dimension 0 donne  $V$ . On note aussi  $F(K) = \bigcup_{i \geq -1} F_i(K)$ .

On note  $\dim F$  la dimension d'une face  $F$ , et  $\dim K$  le maximum des dimensions de ses faces. Une face est dite maximale si elle l'est pour l'inclusion, et on dit que  $K$  est un simplexe s'il possède une seule face maximale.

On note  $\Delta_n$  le simplexe de dimension  $n$  (unique à isomorphisme simplicial près, comme défini plus bas), qui vérifie  $F(\Delta_n) = \mathcal{P}(V(\Delta_n))$ .

Un **morphisme** (simplicial)  $f$  entre deux complexes simpliciaux  $K$  et  $L$  est une application  $V(K) \rightarrow V(L)$  telle que pour toute face  $F$  de  $K$ ,  $f(F)$  est une face de  $L$ . On dispose alors d'une catégorie des complexes simpliciaux.

Un complexe simplicial  $K$  est dit **ordonné** lorsqu'il est muni d'un ordre (partiel ou total) sur ses sommets qui est **total sur chaque face**. Un morphisme de complexes (simpliciaux) ordonnés est un morphisme de complexes simpliciaux croissant entre deux complexes ordonnés. On a alors une catégorie COrd des complexes ordonnés.

Enfin, pour  $E$  un ensemble ordonné, on note  $\mathcal{K}E$  le complexe simplicial ordonné dont les sommets sont les points de  $E$  et les faces sont les parties totalement ordonnées de  $E$ , et ainsi toute application croissante  $E \xrightarrow{f} E'$  entre deux ensembles ordonnés induit un morphisme simplicial entre  $\mathcal{K}E$  et  $\mathcal{K}E'$  car pour toute face  $F \in F(\mathcal{K}E)$ ,  $f(F)$  est totalement ordonnée dans  $E'$ . Il est alors immédiat que  $\mathcal{K}$  est un foncteur. On peut ainsi construire  $\Delta_n$  comme  $\mathcal{K}\{0, \dots, n\}$ .

**Propriété 2.** Les catégories des complexes simpliciaux et des complexes simpliciaux ordonnés possèdent toutes deux des **produits finis** et des **coproduits finis**. Les coproduits sont les mêmes dans les deux cas, mais les produits sont très différents. Aussi nous utiliserons pour le produit de deux complexes ordonnés  $K$  et  $L$  la notation  $K \times L$  et nous parlerons dans ce cas de **produit géométrique**, et pour deux complexes non ordonnés on notera  $K * L$  et on parlera de **produit naturel**.

Justifions rapidement ces terminologies : le produit  $*$  est naturel en ceci qu'il ne nécessite pas de structure d'ordre sur les complexes  $K$  et  $L$ , et par conséquent il est plus simple à manipuler d'un point de vue algébrique. Le produit  $\times$  est moins naturel, mais il a l'avantage de concorder avec le produit cartésien d'espaces topologiques : le produit géométrique  $\Delta_1 \times \Delta_1$  est un carré comme on peut s'y attendre, alors que le produit naturel  $\Delta_1 * \Delta_1$  est un tétraèdre  $\Delta_3$ . Heureusement, un tétraèdre et un carré possèdent la même homologie.

Ces constructions disposent des propriétés élémentaires suivantes :

**Propriété 3.** Pour  $K$  et  $L$  deux complexes simpliciaux ordonnés non vides :

$$\begin{aligned} \dim K \times L &= \dim K + \dim L \\ \dim K \sqcup L &= \max(\dim K, \dim L) \end{aligned}$$

## 2 Définition et premières propriétés de l'homologie simpliciale

Pour ne pas alourdir le texte, on ne rappelle pas les définitions des objets de base de l'algèbre homologique que sont la catégorie des complexes de chaînes de  $\mathbb{A}$ -modules, les  $\mathbb{A}$ -modules d'homologie associés à un complexe de chaînes et les morphismes de  $\mathbb{A}$ -modules induits en homologie par un morphisme de complexe de chaînes.

Pour chaque complexe simplicial  $K$ , on va construire un complexe de chaînes de  $\mathbb{A}$ -modules  $C_*(K)$  et étudier comment se traduisent certaines propriétés topologiques de  $K$  en des propriétés algébriques des groupes d'homologie de  $C_*(K)$ .

### 2.1 Construction du foncteur d'homologie simpliciale

On a d'abord besoin de la notion d'orientation d'un ensemble fini  $X$ . Une **numérotation** de  $X$  est une bijection de  $\{0, \dots, |X| - 1\}$  vers  $X$ . On note  $\text{Num } X$  l'ensemble des numérotations de  $X$ .

Une **orientation** de  $X$  est alors une application  $\text{Num } X \xrightarrow{o} \mathbb{U}_2$  qui vérifie  $o(b \circ \sigma) = o(b)\varepsilon(\sigma)$  pour toute numérotation  $b$  et toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , le groupe symétrique  $\mathfrak{S}_n$  étant ici vu comme le groupe des bijections de  $\{0, \dots, n - 1\}$ . L'ensemble des orientations de  $X$  sera noté  $\text{Or } X$ . À toute orientation  $o$  sur  $X$ , on associe l'orientation contraire  $o^{-1}$  qui à  $b$  associe  $-o(b)$ , et c'est bien une orientation sur  $X$ . On dispose ainsi d'une action de  $\mathbb{U}_2$  sur  $\text{Or } X$ .

Pour toute numérotation  $b$  de  $X$ , il existe une unique orientation  $(b)$  qui envoie  $b$  sur  $+1$ , appelée **orientation engendrée** par  $b$ . Elle est unique car si deux orientations  $o$  et  $o'$  coïncident sur une numérotation  $b$ , alors  $o = o'$  :

$$o(b') = o(b \circ (b^{-1}b')) = o(b)\varepsilon(b^{-1}b') = o'(b)\varepsilon(b^{-1}b') = o'(b')$$

pour toute numérotation  $b'$ . Un ensemble fini a toujours exactement deux orientations pour cette raison. On aura coutume de noter une numérotation  $b$  ainsi :  $b = [b(0), \dots, b(n - 1)]$  et l'orientation associée  $(b) = (b(0), \dots, b(n - 1))$ .

**Définition 4.** Soit  $K$  un complexe simplicial. On note, pour  $n \geq 0$ ,  $C_n(K)$  le quotient du  $\mathbb{A}$ -module libre engendré par les orientations de faces de dimension  $n$  de  $K$  par le sous-module engendré par les  $o + o^{-1}$  pour toute orientation  $o$  d'une face de dimension  $n$ . On appelle ce module le **module des chaînes** de dimension  $n$  sur  $K$ .

À tout complexe simplicial  $K$  on peut associer le complexe de chaînes dont les modules sont les  $C_n(K)$  et

dont les morphismes de bords sont les  $\partial_n$  **définis en annexe**. On note ce complexe de chaînes  $C_*(K)$ , et pour  $n < 0$ , on pose simplement  $C_n(K) = 0$ .

Soient  $K$  et  $L$  deux complexes simpliciaux et  $K \xrightarrow{f} L$  un morphisme simplicial. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $F = \{v_0, \dots, v_n\} \in F_n(K)$ . On pose :

$$f_n(v_0, \dots, v_n) = (f(v_0), \dots, f(v_n)) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} (f(v_0), \dots, f(v_n)) & \text{si } f \text{ injective sur } F \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette définition s'étend sur  $C_n(K)$  par linéarité car si  $f$  est injective sur  $F$ , pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ , on a  $f_n((v_{\sigma(0)}, \dots, v_{\sigma(n)})) = \varepsilon(\sigma)(f(v_0), \dots, f(v_n))$ . On obtient ainsi une application linéaire  $C_n(K) \xrightarrow{f_n} C_n(L)$ . On étend la définition à  $n < 0$  en posant  $f_n = 0$ .

La famille  $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  constitue un morphisme de complexes de chaînes  $C_*(K) \xrightarrow{f_*} C_*(L)$ , et ainsi on a construit un foncteur  $C_*$  de la catégorie des complexes simpliciaux non ordonnés vers celle des complexes de chaînes sur  $\mathbb{A}$ . Ce foncteur est le **foncteur d'homologie simpliciale**.

**Propriété 5.** (Préservation des coproduits finis)

Soient  $K$  et  $L$  deux complexes simpliciaux. On a  $C_*(K \sqcup L) \cong C_*(K) \oplus C_*(L)$ . De plus, par composition de foncteurs qui préservent les coproduits, on a pour tout  $n : H_n(K \sqcup L) \cong H_n(K) \oplus H_n(L)$ . Enfin, un complexe simplicial vide possède une homologie nulle.

## 2.2 Connexité et interprétation du $H_0$

**Définition 6.** Soit  $K$  un complexe simplicial. On dit que deux sommets  $A, B \in V(K)$  sont **adjacents** si  $\{A, B\} \in F_1(K)$ . On note  $\sim$  la clôture transitive et réflexive de la relation d'adjacence (elle est déjà symétrique), et on dit que  $A$  et  $B$  sont **connectés** lorsque  $A \sim B$ .  $K$  est dit **connexe** lorsque tous ses sommets sont connectés.

**Théorème 7.** (Calcul du  $H_0$ )

Soit  $K$  un complexe simplicial qui possède  $p$  composantes connexes, c'est à dire que  $|V(K)/\sim| = p$ . Alors on a :

$$H_0(K) \cong \mathbb{A}^p$$

## 2.3 Polynôme de Poincaré et caractéristique d'Euler

Il s'agit ici d'évoquer des invariants historiques plus faibles que les modules d'homologie, et qui motivent d'une certaine façon la théorie de l'homologie simpliciale.

**Définition 8.** Pour  $K$  un complexe simplicial, on pose la somme finie :

$$\chi(K) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^k |F_n(K)|$$

On verra dans cette section que  $\chi(K)$  ne dépend que des modules d'homologie de  $K$ .

Prenons ensuite  $\mathbb{A} = \mathbb{K}$  un corps de caractéristique 0. On appelle  $n$ -ème **nombre de Betti** de  $K$  le nombre :

$$\beta_n(K) = \dim_{\mathbb{K}} H_n(K)$$

qui est indépendant du corps de caractéristique 0 choisi (**démontré dans l'annexe**). Le polynôme de Poincaré de  $K$  est alors :

$$P_K = \sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n(K) X^n$$

**Propriété 9.** Soient  $K$  et  $L$  deux complexes simpliciaux (ordonnés). On a :

- $\chi(K) = P_K(-1)$
- $P_{K \sqcup L} = P_K + P_L$
- $\chi(K \sqcup L) = \chi(K) + \chi(L)$
- $P_{K \times L} = P_K P_L$  (à condition d'accepter la conjecture ci-après sur l'homologie d'un produit)
- $\chi(K \times L) = \chi(K)\chi(L)$  (idem)

Un corollaire immédiat est que  $\chi(K)$  ne dépend que de l'homologie de  $K$  à coefficients dans un corps de caractéristique 0, comme promis plus haut.

**Conjecture 10.** On suppose que  $\mathbb{A} = \mathbb{K}$  est un corps. Soient  $K$  et  $L$  deux complexes simpliciaux ordonnés. On a :

$$H_n(K \times L) \cong H_n(K * L) \cong \bigoplus_{p+q=n} H_p(K) \otimes H_q(L)$$

Motivons rapidement cette conjecture et énonçons les difficultés qui s'opposent à la démonstration d'un tel résultat. Si le foncteur d'homologie simpliciale préserve les coproduits, il est naturel de se demander ce qu'il en est des produits naturel et géométrique. Cependant, la notion de produit d'espaces ne se comporte pas bien en géométrie simpliciale (il y a deux produits différents et aucun ne remplit à la fois des bonnes propriétés géométriques et algébriques). Ainsi, il est difficile d'obtenir des résultats algébriques sur l'homologie d'un produit naturel (ou géométrique) de deux complexes simpliciaux (ordonnés).

Une stratégie pour démontrer un tel résultat est de construire la notion de produit tensoriel de complexes de chaînes, puis d'établir un cas particulier du théorème de Künneth qui donne l'homologie d'un tel produit tensoriel (toujours dans le cas où  $\mathbb{A}$  est un corps).

Il s'agit ensuite de montrer que le complexe de chaînes de  $K \times L$  est algébriquement homotope (en un sens précisé dans la section suivante) à  $C_*(K) \otimes C_*(L)$ . Notons qu'il est possible de définir un morphisme naturel  $C_*(K) \otimes C_*(L) \rightarrow C_*(K \times L)$ , mais qu'un tel morphisme n'est pas surjectif en général, comme on peut le voir sur des petits cas. On peut tout de même conjecturer qu'il s'agisse d'une équivalence d'homotopie (idem).

Enfin, il resterait à établir que  $K \times L$  et  $K * L$  ont la même homologie (on peut conjecturer qu'ils sont homotopes au sens de la section suivante).

## 3 Homotopies et invariance de l'homologie simpliciale par homotopie

### 3.1 Homotopies simpliciales

L'homotopie au sens topologique est une notion plus faible que la continuité et les homéomorphismes. On y autorise les points à se confondre tant qu'aucun trou n'est créé ou rebouché. Elle s'adapte dans le contexte discret des complexes simpliciaux, de manière un peu moins naturelle. On rappelle que  $\Delta_1$  est le simplexe de dimension 1, dont on ordonne les sommets 0 et 1 avec  $0 \leq 1$ .

**Définition 11.** Soient  $K$  et  $L$  deux complexes simpliciaux,  $K \xrightarrow{f} L$  et  $K \xrightarrow{g} L$  deux morphismes simpliciaux. On dit que  $f$  et  $g$  sont **directement homotopes** si l'application :

$$\Delta_1 * K \xrightarrow{\alpha} L$$

vérifiant  $\alpha(0, \bullet) = f$  et  $\alpha(1, \bullet) = g$  est un morphisme simplicial. Il est facile de voir que cette condition est équivalente à la suivante, plus pratique :

$$\forall F_1, F_2 \in F(K) \quad F_1 \cup F_2 \in F(K) \implies f(F_1) \cup g(F_2) \in F(L)$$

Cette relation n'est pas transitive (il faut plusieurs étapes pour tordre un complexe simplicial sans le casser), c'est pourquoi on ajoute le qualificatif **directement**. En revanche il découle directement de la caractérisation ci-dessus qu'elle est **symétrique et réflexive**.

On note alors  $\simeq$  la clôture transitive de la relation d'homotopie directe. On appelle cela la relation d'**homotopie** entre morphismes simpliciaux. C'est par construction une relation d'équivalence.

**Définition 12.** (Complexes homotopes) Deux complexes simpliciaux  $K$  et  $L$  sont dits **homotopes** s'il existe deux morphismes simpliciaux :

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ K & \xrightarrow{\quad} & L \\ & g & \end{array}$$

telles que  $f \circ g \simeq \text{id}_L$  et  $g \circ f \simeq \text{id}_K$ .  $f$  et  $g$  sont alors appelés des équivalences d'homotopie. La relation d'homotopie entre complexes simpliciaux, que l'on notera aussi  $\simeq$  est clairement réflexive (prendre l'identité de chaque côté et utiliser la réflexivité de  $\simeq$  sur les morphismes simpliciaux), symétrique (la condition ci-dessus est tout à fait symétrique), et **transitive** comme démontré dans l'annexe. Enfin, mentionnons qu'un complexe simplicial est dit **contractile** s'il est homotope au point  $\Delta_0$ .

**Propriété 13.** La relation d'homotopie entre morphismes simpliciaux est également **stable par le coproduit et le produit naturel** des morphismes simpliciaux. En conséquence, si  $K \simeq K'$  et  $L \simeq L'$ , alors  $K * K' \simeq L * L'$  et  $K \sqcup K' \simeq L \sqcup L'$ .

Notons qu'il existe une manière plus simple de vérifier la contractilité d'un complexe simplicial :

**Propriété 14.** (Caractérisation de la contractilité) Un complexe  $K$  est **contractile** si et seulement si il existe  $v \in V(K)$  tel que le morphisme simplicial  $\underline{v}$  qui envoie tout sommet sur  $v$  est homotope à  $\text{id}_K$ .

Cela permet de montrer le résultat suivant :

**Théorème 15.** Si  $E$  est un ensemble ordonné qui possède un plus grand élément (ou un plus petit élément, c'est quasiment la même preuve), alors  $\mathcal{K}E$  est contractile, et en particulier **les simplexes non vides sont contractiles**.

### 3.2 Homotopies algébriques

On introduit la notion d'homotopie algébrique entre morphismes de complexes de chaînes, puis entre complexes de chaînes.

**Définition 16.** (**Application linéaire de degré  $k$  et homotopie**)

Une application linéaire  $\alpha$  de degré  $k \in \mathbb{Z}$  entre deux complexes de chaînes  $C$  et  $D$  est la donnée pour tout entier  $n$  d'une application linéaire  $C_n \xrightarrow{\alpha_n} D_{n+k}$  sans condition particulière vis à vis des applications de bords. On notera  $C \xrightarrow{\alpha} D$  une telle application pour insister sur le fait que ce n'est pas nécessairement un morphisme de complexes de chaînes.

Soient :

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} D$$

deux morphismes de complexes de chaînes. Une **homotopie** entre  $f$  et  $g$  est une application linéaire  $C \xrightarrow{\alpha} D$  de degré  $+1$  qui vérifie :

$$g - f = \partial\alpha + \alpha\partial$$

ce qui signifie avec des indices que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on a  $g_n - f_n = \partial_{n+1} \circ \alpha_n + \alpha_{n-1} \circ \partial_n$ .

Lorsqu'une telle homotopie existe, on dit que  $f$  et  $g$  sont **homotopes** et on note cela  $f \simeq g$ . Deux complexes de chaînes sont homotopes lorsqu'il existe des équivalences d'homotopies  $f$  et  $g$  entre les deux, c'est à dire deux morphismes de complexes de chaînes  $C \xrightarrow{f} D$  et  $D \xrightarrow{g} C$  vérifiant  $fg \simeq \text{id}$  et  $gf \simeq \text{id}$ .

**Propriété 17.** L'homotopie entre les morphismes de complexes de chaînes est une **relation d'équivalence**. Elle est de plus stable par combinaisons linéaires.

**Propriété 18.** (Composition horizontale d'homotopies) Étant donnée la situation suivante :

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{f'} \end{array} D \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{g'} \end{array} E$$

Si on dispose d'une homotopie  $\alpha$  entre  $f$  et  $f'$  et d'une homotopie  $\beta$  entre  $g$  et  $g'$ , alors l'application linéaire de degré  $-1$  définie par  $\beta f' + g\alpha$  est une homotopie entre  $gf$  et  $g'f'$ , appelée **composée horizontale** de  $\beta$  après  $\alpha$ . En conséquence, la relation d'homotopie des morphismes est **stable par composition**.

**Corollaire 19.** Il découle immédiatement de tout ceci que la relation d'homotopie entre les complexes de chaînes est une **relation d'équivalence**.

La notion d'homotopie algébrique est motivée par le résultat suivant :

**Théorème 20.** (Invariance homotopique de l'homologie, cas algébrique) Deux morphismes homotopes  $f$  et  $g$  de  $C$  vers  $D$  sont égaux en homologie :

$$H_n(f) = H_n(g)$$

Deux complexes de chaînes homotopes  $C$  et  $D$  ont des groupes d'homologie isomorphes et un isomorphisme est induit par une équivalence d'homotopie entre les deux :

$$H_n(C) \cong H_n(D)$$

### 3.3 Théorème d'invariance

Les outils définis plus tôt amènent au résultat suivant, qui motive la théorie de l'homologie simpliciale.

**Théorème 21.** (Invariance homotopique de l'homologie simpliciale) Deux morphismes simpliciaux homotopes  $K \xrightarrow{f} L$  et  $K \xrightarrow{g} L$  induisent des morphismes de complexes de chaînes  $f_*$  et  $g_*$  homotopes. En particulier  $H_n(f) = H_n(g)$  en homologie.

Enfin, deux complexes simpliciaux homotopes ont la même homologie, et par conséquent le même polynôme de Poincaré et la même caractéristique d'Euler - propriété bien connue pour les polyèdres même avant la construction des groupes d'homologie -.

On en déduit le résultat suivant :

**Propriété 22.** Tout complexe simplicial contractile (en particulier tout simplexe) a l'homologie suivante :

$$H_0 \cong \mathbb{A}$$

$$H_n = 0$$

pour tout  $n \neq 0$ .

**Définition 23.** Soit  $K$  un complexe simplicial. On définit le **cône** de  $K$ , noté  $\widehat{K}$ , comme le complexe simplicial dont les sommets sont  $V(K) \sqcup \{\omega\}$ , c'est à dire qu'on ajoute un point  $\omega$ , et dont les faces sont les faces de  $K$  ainsi que les  $F \cup \{\omega\}$  pour  $F$  une face de  $K$ . Il est clair que l'on définit bien ainsi un complexe simplicial, et que l'inclusion  $K \rightarrow \widehat{K}$  est un morphisme simplicial, et on montre dans l'annexe que  $\widehat{K}$  est **contractile**.

## 4 Homologie des sphères et application aux pavages de ballons de football

Un résultat classique de diverses théories homologiques (et cohomologiques) est le calcul de l'homologie (ou de la cohomologie) des sphères euclidiennes  $\mathbb{S}^n$  avec une suite exacte longue de Mayer-Vietoris et son application au théorème du point fixe de Brouwer. Pour des raisons évidentes la théorie discrète présentée ici ne permet pas de démontrer ce théorème de topologie, mais on va quand même calculer l'homologie des sphères simpliciales et en donner une application concrète.

On a d'abord besoin du résultat suivant :

### **Théorème 24. (Suite exacte de Mayer-Vietoris)**

Soit  $K$  un complexe simplicial,  $A$  et  $B$  des **sous-complexes** de  $K$ , c'est à dire que  $V(A)$  et  $V(B)$  sont des parties de  $V(K)$  et que toute face de  $A$  ou de  $B$  est une face de  $K$ . On suppose de plus que :

$$F(K) = F(A) \cup F(B)$$

On appelle cela un **recouvrement** de  $K$ . On note de plus  $A \cap B$  le complexe simplicial vérifiant  $V(A \cap B) = V(A) \cap V(B)$  et  $F(A \cap B) = F(A) \cap F(B)$ , dont on vérifie facilement que c'est un complexe simplicial. La suite de complexes de chaînes :

$$0 \longrightarrow C_*(A \cap B) \xrightarrow{f} C_*(A) \oplus C_*(B) \xrightarrow{g} C_*(K) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Les flèches  $f$  et  $g$  sont définies ainsi :  $f(c) = (c, -c)$  et  $g(c, d) = c + d$  en omettant les indices.

En conséquence, cette suite induit une suite exacte longue en homologie, dite suite de **Mayer-Vietoris**, qui permet parfois de calculer l'homologie de  $K$  en connaissant celle de  $A$  et de  $B$  :

$$\dots \longrightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(K) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \dots$$

On définit, pour  $n \geq 0$ , la sphère  $\mathbb{S}^n$  comme étant le squelette  $n$ -dimensionnel de  $\Delta_{n+1}$ , c'est à dire le complexe simplicial obtenu en ne gardant que les faces de dimension au plus  $n$  de  $\Delta_{n+1}$ .

On a alors le résultat suivant :

**Théorème 25.** Pour tout  $n \geq 1$ , on a :

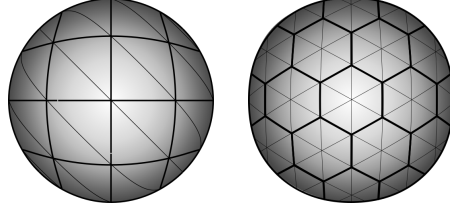
$$H_n(\mathbb{S}^n) \cong H_0(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{A}$$

et pour tout autre entier  $k$  :

$$H_k(\mathbb{S}^n) = 0$$

On déduit de cela que la sphère  $\mathbb{S}^n$  a pour polynôme de Poincaré  $1 + X^n$  et pour caractéristique d'Euler 2 si  $n$  est pair et 0 si  $n$  est impair.

On obtient alors une conséquence concrète de l'invariance de la caractéristique d'Euler de la sphère  $\mathbb{S}^2$  : un ballon de football est une sphère  $\mathbb{S}^2$  et donc toute triangulation d'un tel ballon, vue comme un complexe simplicial, a pour caractéristique d'Euler 2 (en admettant que si un espace est homéomorphe à une sphère, toute triangulation de cette espace est homotope, ou au moins a le même type d'homologie que la sphère simpliciale  $\mathbb{S}^2$ ). Ainsi il est impossible de paver un ballon avec les deux pavages suivants, qui donneraient une caractéristique d'Euler nulle (le calcul est effectué en annexe) :



Notons que sur un espace de caractéristique d'Euler 0 ayant une symétrie qui permet de définir de tels pavages, comme un plan infini ou un tore, rien n'interdit à priori ces pavages. En effet, il est très facile de paver un plan infini avec des carrés ou des hexagones, et un tore aussi, en pavant  $\mathbb{R}^2$  avec un pavage invariant sous l'action naturelle de  $\mathbb{Z}^2$ .

Les pavages les plus simples ne fonctionnent pas sur une sphère. Cela justifie le pavage complexe des ballons de football : 12 faces pentagonales, et 20 faces hexagonales. En triangulant les pentagones en 5 triangles et les hexagones en 6 triangles, on trouve une caractéristique d'Euler de :

$$60 + 12 + 20 - (20 \times (3/2 + 3 + 6) + 12 \times 5) + 6 \times 20 + 5 \times 12 = 2$$

comme attendu.

## 5 Calcul algorithmique de l'homologie à coefficients dans un anneau Euclidien

On considère  $\mathbb{A}$  un anneau euclidien (en particulier commutatif et intègre) et  $|\cdot|$  son stathme euclidien. En pratique,  $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Q}$ .

Présentons la manière dont les modules d'homologie à coefficients dans  $\mathbb{A}$  peuvent être calculés algorithmiquement. Le problème se réduit, après calcul des matrices des morphismes de bords, au suivant : étant données deux matrices  $A \in M_{nm}(\mathbb{A})$ , et  $B \in M_{pn}(\mathbb{A})$  telles que  $BA = 0$ , il s'agit de calculer les facteurs invariants de  $\text{Ker } B / \text{Im } A$ . Lorsqu'il est question d'algorithme du pivot, il s'agit de l'algorithme de Hermite qui consiste à échelonner une matrice en effectuant des opérations sur les lignes (ou sur les colonnes). La seule différence avec l'algorithme du pivot de Gauss est que les éliminations se font par division euclidienne par l'élément de stathme minimal d'une colonne et non par division.

À l'aide d'un algorithme de pivot, on détermine un  $X$  qui rend la suite suivante exacte (ça revient à trouver une base de  $\text{Ker } B$ ) :

$$0 \longrightarrow \mathbb{A}^k \xrightarrow{X} \mathbb{A}^n \xrightarrow{B} \mathbb{A}^p$$

Un tel  $X$  existe puisque  $\text{Ker } B$  est un sous-module d'un module libre donc est libre (et de type fini), puisque  $\mathbb{A}$  est principal.

Ensuite, on factorise  $A$  par  $X$ , c'est à dire qu'on trouve une matrice  $Y$  telle que :

$$A = XY$$

Une telle matrice existe puisque  $\text{Im } A \subseteq \text{Im } X = \text{Ker } B$  et  $X$  est injective. Elle est de plus unique puisque, ensemblistement, l'application derrière  $A$  est inversible à gauche.

Cette unicité permet un algorithme très simple pour calculer  $Y$  : on la calcule dans le corps des fractions  $\mathbb{K}$  de  $\mathbb{A}$  (dans notre cas  $\mathbb{Q}$ ) à l'aide d'un pivot de Gauss classique - puisque on a toujours l'inclusion des images et l'injectivité de  $X \otimes_{\mathbb{A}} \text{id}_{\mathbb{K}}$ , qui provient du fait que la suite exacte  $0 \rightarrow \mathbb{A}^k \rightarrow \mathbb{A}^n \rightarrow \text{Im } B \rightarrow 0$  est scindée car  $\text{Im } B$  est libre -, et la matrice obtenue est alors nécessairement à coefficients dans  $\mathbb{A}$  par unicité.

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \mathbb{A}^m & & & & \\
& & \downarrow Y & \searrow A & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{A}^k & \xrightarrow{X} & \mathbb{A}^n & \xrightarrow{B} & \mathbb{A}^p
\end{array}$$

On a donc :

$$\text{Ker } B / \text{Im } A = \text{Im } X / \text{Im } XY \cong \mathbb{A}^k / \text{Im } Y = \text{Coker } Y$$

avec un isomorphisme induit par  $X$ . Tout le problème se ramène alors au calcul des facteurs invariants de  $\text{Coker } Y$ .

Pour cela, on utilise l'algorithme de Smith qui construit, à l'aide d'opérations sur les lignes et les colonnes, deux matrices inversibles  $U$  et  $V$  telles que  $UYV$  est sous la forme normale de Smith :

$$UYV = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & d_{\min(m,k)} \\ \vdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

représentée ici pour le cas  $m \leq k$ , avec  $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_{\min(m,k)}$ .

Puisque  $Y$  et  $UYV$  sont conjuguées on a alors :

$$\begin{aligned}
\text{Coker } Y &\cong \text{Coker } UYV \\
&= \frac{\mathbb{A} \oplus \dots \oplus \mathbb{A}}{\mathbb{A}d_1e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{A}d_{\min(m,k)}e_{\min(m,k)} \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0} \\
&\cong \left( \bigoplus_{i=1}^{\min(m,k)} \frac{\mathbb{A}}{d_i\mathbb{A}} \right) \oplus \mathbb{A}^{k-\min(m,k)}
\end{aligned}$$

On lit donc les facteurs invariants cherchés directement sur les coefficients diagonaux de  $UYV$ .

## 6 Annexe

### 6.1 Démonstrations des résultats présentés

- **Propriété 2 :** (Produits et coproduits dans les catégories des complexes simpliciaux ordonnés)

On le démontre dans le cas plus difficile de la catégorie des complexes ordonnés : Soient  $K$  et  $L$  deux complexes ordonnés. On définit le complexe  $K \times L$  en prenant  $V(K \times L) = V(K) \times V(L)$  muni de l'ordre produit, et en prenant pour faces de  $K \times L$  les parties  $F$  de  $V(K \times L)$  totalement ordonnées par l'ordre produit qui vérifient  $\pi_K(F) \in F(K)$  et  $\pi_L(F) \in F(L)$ .

On a bien défini un complexe simplicial ordonné fini, car si  $F \in F(K \times L)$  et  $G \subseteq F$ ,  $G$  est totalement ordonnée par l'ordre produit et  $\pi_K(G) \subseteq \pi_K(F)$  dont  $\pi_K(G)$  est une face de  $K$ , et de même  $\pi_L(G) \in F(L)$ .

Les projections  $\pi_K$  et  $\pi_L$  sont par construction des morphismes de complexes ordonnés. Montrons alors que  $(K \times L, \pi_K, \pi_L)$  est terminal, en prenant  $(X, \rho_K, \rho_L)$  un cône au dessus du diagramme discret  $K \ L$ .

Comme  $V(K \times L) = V(K) \times V(L)$  dans la catégorie des ensembles ordonnés, il existe une unique application croissante  $f$  qui fait commuter le diagramme d'applications croissantes suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & V(X) & \\
 \rho_K \swarrow & \downarrow f & \searrow \rho_L \\
 & V(K \times L) & \\
 \pi_K \swarrow & & \searrow \pi_L \\
 V(K) & & V(L)
 \end{array}$$

Il suffit alors de montrer que  $f$  est un morphisme simplicial : soit  $F \in F(X)$ , on a  $\pi_K(f(F)) = \rho_K(F) \in F(K)$  car  $\rho$  est un morphisme simplicial, et de même  $\pi_L(f(F)) \in F(L)$ . Donc  $f(F) \in F(K \times L)$ . Enfin, pour tous  $f(x), f(y) \in f(F)$  (avec  $x, y \in F$ ), par totalité de  $F$ , on a soit  $x \leq y$  soit  $y \leq x$ . Si  $x \leq y$ , alors  $f(x) \leq f(y)$ , et de même dans l'autre cas. Donc  $f(F)$  est totalement ordonné dans  $V(K \times L)$ .  $K \times L$  est donc bien le produit de  $K$  et  $L$  dans COOrd. Pour obtenir le produit  $K * L$ , c'est la même construction mais sans la condition de totalité vis-à-vis de l'ordre produit.

Ensuite, on définit le coproduit  $K \sqcup L$  dont l'ensemble ordonné des points est  $V(K) \sqcup V(L)$  (coproduit dans la catégorie des ensembles ordonnés) et dont les faces sont les  $\iota_K(F)$  et les  $\iota_L(G)$  pour  $F \in F(K), G \in F(L)$  et  $\iota_K, \iota_L$  les injections dans le coproduit. On vérifie facilement que c'est bien le coproduit.

- **Propriété 3 :** (Dimension d'un produit géométrique et d'un coproduit)

Comme  $K$  et  $L$  sont non vides, on peut prendre une face de dimension maximale  $F \in F(K)$  et une face de dimension maximale  $G \in F(L)$  non vides. On ordonne les sommets de  $F$  et  $G$  puisqu'elles sont totalement ordonnées :  $v_0 < \dots < v_p$  sont les sommets de  $F$  et  $w_0 < \dots < w_q$  sont les sommets de  $G$ , avec  $p = \dim K$  et  $q = \dim L$ . Posons alors la face :

$$H = \{(v_0, w_0), (v_1, w_0), \dots, (v_p, w_0), (v_p, w_1), \dots, (v_p, w_q)\}$$

Par construction, cette face est totalement ordonnée,  $\pi_K(H) = F$  et  $\pi_L(H) = G$ , et elle est de cardinal  $p + 1 + q$  donc :

$$H \in F_{p+q}(K \times L)$$

Cela démontre  $\dim K \times L \geq p + q$ , pour montrer l'autre inégalité, prenons une face  $H$  de  $K \times L$ . Notons  $F$  la face  $\pi_K(H)$  et  $G$  la face  $\pi_L(H)$ , et ordonnons comme plus haut les sommets de ces deux faces :  $v_0 \leq \dots \leq v_r$  sont les sommets de  $F$  et  $w_0 \leq \dots \leq w_s$  sont les sommets de  $G$ . On a  $r \leq p$  et  $q \leq s$ , et  $H$  est une partie

totalelement ordonnée de  $F \times G$ , notons ses sommets distincts :

$$(v_{i_0}, w_{j_0}) < (v_{i_1}, w_{j_1}) < \dots < (v_{i_t}, w_{j_t})$$

On a  $v_{i_0} \leq v_{i_1} \leq \dots \leq v_{i_t}$ . Notons  $\lambda$  le nombre de ces inégalités qui sont en fait des égalités, et de même  $\mu$  le nombre d'inégalités de la forme  $w_{j_k} \leq w_{j_{k+1}}$  qui sont des égalités. Comme la suite écrite au dessus est strictement croissante, pour tout  $k$  on a soit  $v_{i_k} < v_{i_{k+1}}$  soit  $w_{j_k} < w_{j_{k+1}}$ , ce qui impose :

$$\lambda + \mu \geq t$$

Or  $\lambda \leq r$  et  $\mu \leq s$  donc finalement :

$$t \leq r + s$$

On en déduit  $\dim K \times L = \dim K + \dim L$ . Notons d'ailleurs que l'inégalité  $t \leq r + s$  montre aussi que **si  $H$  est maximale, alors nécessairement  $F$  et  $G$  le sont aussi.**

La deuxième affirmation découle directement de  $F(K \sqcup L) = F(K) \sqcup F(L)$ .

• **Morphismes bords de  $C_*(K)$**

Soit  $n \geq 1$ . On définit, pour  $c$  une orientation d'une face  $F$  de dimension  $n$ , le **bord** de  $c$  par :

$$\partial c = \sum_{x \in F} (c \setminus x)$$

où  $c \setminus x$  est l'orientation de  $F \setminus \{x\}$  définie par :

$$(c \setminus x)(b) = c([x, b(0), \dots, b(n-2)])$$

pour une numérotation  $b$  de  $F \setminus \{x\}$ .

Il s'agit bien d'une orientation, car pour tous  $b \in \text{Num } F \setminus \{x\}$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$ , on a :

$$\begin{aligned} (c \setminus x)(b \circ \sigma) &= c([x, b(\sigma(0)), \dots, b(\sigma(n-2))]) \\ &= c([x, b(0), \dots, b(n-2)] \circ \hat{\sigma}) \\ &= (c \setminus x)(b) \varepsilon(\sigma) \end{aligned}$$

où  $\hat{\sigma}$  est l'image de  $\sigma$  par l'injection naturelle  $\mathfrak{S}_{F \setminus \{x\}}$  dans  $\mathfrak{S}_F$  en voyant  $\mathfrak{S}_{F \setminus \{x\}}$  comme le stabilisateur de  $x$  dans  $\mathfrak{S}_F$ , ainsi  $\hat{\sigma}$  a bien la même signature que  $\sigma$ .

Il reste alors à vérifier que  $\partial \circ \partial = 0$ . Pour cela on utilise les deux lemmes suivants :

**Lemme.** Soit  $X$  un ensemble fini de cardinal  $n + 1$ , soit  $b = [x_0, \dots, x_n] \in \text{Num } X$  et  $i \in \{0, \dots, n\}$  :

$$(b) \setminus x_i = (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)^{(-1)^i}$$

*Démonstration.* On calcule :

$$\begin{aligned} ((b) \setminus x_i)([x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]) &= (b)([x_i, x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]) \\ &= (b)([x_0, \dots, x_n] \circ (i \ i-1 \ \dots \ 1 \ 0)) \\ &= 1 \times (-1)^{i+1-1} \\ &= (-1)^i \end{aligned}$$

□

**Lemme.** Soit  $o \in \text{Or } X$  et  $x \in X$ . On a :

$$(o \setminus x)^{-1} = (o^{-1} \setminus x)$$

*Démonstration.* Cela s'obtient directement via la définition de  $o \setminus x$ , en évaluant en une numérotation  $b \in \text{Num } X$ .  $\square$

Montrons alors  $\partial \circ \partial = 0$  :

Il suffit de le démontrer pour  $n \geq 1$  et pour une orientation  $c = (x_0, \dots, x_{n+1})$  de face  $F$  de dimension  $n + 1$  car celles ci engendrent  $C_{n+1}(K)$ . On développe :

$$\begin{aligned}
\partial \circ \partial(c) &= \partial \left( \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n+1} (-1)^i (-1)^{\mu_{i,j}} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{i+j+1} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i+j} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{i+j} (x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Le chapeau désigne ici une omission, et  $\mu_{ij} := \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j - 1 & \text{sinon} \end{cases}$ .

• **L'application  $C_*(f)$  est bien un morphisme de complexes de chaînes**

Il s'agit d'abord de montrer que ce diagramme commute (pour  $n \geq 0$ , les autres cas étant immédiats) :

$$\begin{array}{ccc}
C_{n+1}(K) & \xrightarrow{\partial} & C_n(K) \\
\downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n \\
C_{n+1}(L) & \xrightarrow{\partial} & C_n(L)
\end{array}$$

Par linéarité, on le montre pour une orientation  $o = (v_0, \dots, v_{n+1})$  de la face  $F = [v_0, \dots, v_{n+1}]$  :

- Si  $f(F)$  est de dimension  $< n$ , alors les deux compositions donnent 0, car  $f$  n'est alors pas injective sur les  $n$ -faces de  $F$  et pas injective sur  $F$ .
- Si  $f(F)$  est de dimension  $n + 1$ ,  $f$  est injective sur  $F$  et sur les  $n$ -faces de  $F$  et donc le calcul est automatique.
- Si  $f(F)$  est de dimension  $n$ , il existe  $i \neq j$  vérifiant  $f(v_i) = f(v_j) =: w$  et  $f$  est injective sur  $F \setminus \{i, j\}$ . On a alors :

$$\begin{aligned}
f_n(\partial o) &= \sum_{k=0}^{n+1} f_n(o \setminus v_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k f_n((v_0, \dots, \widehat{v}_k, \dots, v_{n+1})) \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i, k \neq j}}^{n+1} (-1)^k \cdot 0 + (-1)^i (f(v_0), \dots, \widehat{f(v_i)}, \dots, f(v_{n+1})) \\
&\quad + (-1)^j (f(v_0), \dots, \widehat{f(v_j)}, \dots, f(v_{n+1})) \\
&= 0 \quad \text{en prenant la bonne permutation de } \mathfrak{S}_{n+1}
\end{aligned}$$

D'autre part,  $f_{n+1}(o) = 0$  car  $f$  n'est pas injective sur  $F$  et donc  $\partial f_{n+1}(o) = 0$ .

On en déduit que le diagramme commute et que  $f_*$  est un morphisme de complexes de chaînes  $C_*(K) \rightarrow C_*(L)$ . La functorialité de cette construction est facile à vérifier, car la composée de deux applications injectives est injective, et l'identité est injective.

• **Propriété 5 :** (Préservation des coproduits finis)

Montrons d'abord que pour tout  $n$ ,  $C_n(K \sqcup L) \cong C_n(K) \oplus C_n(L)$  : une base de  $C_n(K \sqcup L)$  est donnée (par exemple) par un choix d'orientation des faces de dimension  $n$  :  $(o_F)_{F \in F_n(K \sqcup L)}$ . Comme  $F_n(K \sqcup L) = F_n(K) \sqcup F_n(L)$ ,  $(o_F)$  induit deux choix d'orientation des faces de dimension  $n$  de  $K$  et  $L$  et donc des bases de  $C_n(K)$  et  $C_n(L)$ , qui une fois concaténées donnent la base de départ sur  $C_n(K \sqcup L)$ . On a donc bien le résultat voulu.

Ensuite l'opérateur  $\partial$  sur  $K \sqcup L$  est bien la somme des opérateurs de bords de  $K$  et de  $L$ , donc  $C_*(K \sqcup L) \cong C_*(K) \oplus C_*(L)$ .

• **Théorème 7 :** (Calcul du  $H_0$ )

On commence par trois résultats préliminaires. On utilisera le complexe réduit à un point, que l'on notera  $P$ . Il s'agit de l'objet final de la catégorie des complexes simpliciaux. Il est de dimension 0 donc seul son  $H_0$  peut ne pas être trivial, et on a en fait  $H_0(P) = \text{Ker } 0 / \text{Im } 0 = C_0(P) = \mathbb{A}\pi(X) \cong \mathbb{A}$  en notant  $X$  l'unique point de  $P$  et  $\pi$  la surjection canonique.

**Lemme.** Soit  $K$  un complexe,  $A$  un sommet et  $\lambda$  un scalaire. Si  $\pi(\lambda A) = 0$ , alors  $\lambda = 0$ . (où  $\pi(\lambda A)$  désigne la classe d'homologie de  $\lambda A$  qui a du sens car  $\partial(\lambda A) = 0$ ).

*Démonstration.* Notons  $f$  l'unique morphisme simplicial  $K \rightarrow P$ , et observons ce qu'il advient en homologie :

$$0 = f(\pi(\lambda A)) = \lambda \pi(f(A)) = \lambda \pi(X)$$

en notant  $X$  l'unique point de  $P$ . Or  $H_0(P)$  est libre et engendré par  $\pi(X)$  donc  $\lambda = 0$ . Notons qu'on s'est ici autorisés à écrire  $f$  pour  $H_0(f)$ .  $\square$

**Lemme.** Soit  $K$  un complexe, deux points  $A$  et  $B$  sont connectés si et seulement si  $\pi(A) = \pi(B)$ .

*Démonstration.* Si  $A \sim B$ , il existe  $A = X_0, \dots, X_n = B$  tels que pour tout  $k$ ,  $[X_k, X_{k+1}] \in F_1(K)$ . Posons  $\gamma := \sum_k (X_k, X_{k+1}) \in C_1(K)$  et observons :

$$\partial \gamma = \sum_k (X_{k+1} - X_k) = B - A$$

donc  $\pi(A) = \pi(B)$ .

Réciproquement, si  $\pi(A) = \pi(B)$ , prenons  $\gamma = \sum_I \lambda_i (X_i, Y_i) \in C_1(K)$  vérifiant  $\partial\gamma = B - A$ , où  $I$  est un ensemble fini d'indices. On définit une relation d'équivalence sur  $I$ , notée  $\sim$ , comme la clôture transitive de la relation  $i \equiv j \iff \{X_i, Y_i\} \cap \{X_j, Y_j\} \neq \emptyset$ . On a :

$$\begin{aligned} B - A &= \sum_{i \in I} \lambda_i (Y_i - X_i) \\ &= \sum_{c \in I/\sim} \sum_{i \in c} \lambda_i (Y_i - X_i) \end{aligned}$$

qui est une décomposition dans la somme directe  $\bigoplus_{c \in I/\sim} \text{Vect}_{\mathbb{A}}(X_i, Y_i \mid i \in c)$ , somme qui est directe par définition de  $\sim$  et par le fait que les sommets forment une base de  $C_0(K)$ .

Il existe deux indices  $i_A$  et  $i_B$  tels que  $A \in \{X_{i_A}, Y_{i_A}\}$  et  $B \in \{X_{i_B}, Y_{i_B}\}$ . Si  $i_A \sim i_B$ , alors  $A \sim B$  par définition de  $\sim$ . Sinon, en projetant dans la somme directe ci-dessus, on obtient :

$$B = \sum_{i \sim i_B} \lambda_i (Y_i - X_i) = \partial \left( \sum_{i \sim i_B} \lambda_i (X_i, Y_i) \right)$$

et donc  $\pi(B) = 0$  ce qui est absurde d'après le lemme précédent car  $1 \neq 0$  dans un anneau non nul. On en déduit  $A \sim B$ . □

**Lemme.** Si  $K$  est non vide, alors  $K$  est connexe si et seulement si  $H_0(K) \cong \mathbb{A}$ .

*Démonstration.* Si  $K$  est connexe, notons  $f$  l'unique morphisme simplicial  $K \rightarrow P$ , où  $P$  est le complexe réduit à un point. La suite :

$$C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{f_0} C_0(P) \rightarrow 0$$

est exacte. En effet,  $f_0$  est surjective car  $K$  est non vide,  $f_0 \circ \partial_1 = \partial_1 \circ f_1 = 0$  car  $f$  est un morphisme simplicial et  $f_1 = 0$ , et enfin montrons  $\text{Ker } f_0 \subseteq \text{Im } \partial_1$  :

Si  $c = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i \in \text{Ker } f_0$ , alors  $\sum_i \lambda_i = 0$ . Plaçons nous dans le cas non trivial où  $n \geq 2$ , on a alors  $\lambda_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i$  et donc :

$$c = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i A_i - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i A_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (A_i - A_n) \in \text{Im } \partial_1$$

car  $\pi(A_i) = \pi(A_n)$  par connexité de  $K$ .

En dévissant cette suite, on obtient directement  $H_0(K) \cong C_0(P) \cong \mathbb{A}$ . Notons d'ailleurs que  $f$  induit dans ce cas un isomorphisme entre  $H_0(K)$  et  $H_0(P)$ .

Réciproquement, supposons  $H_0(K) \cong \mathbb{A}$ , et prenons  $\pi(c)$  un générateur de  $H_0(K)$ . Montrons que pour tout point  $A \in V(K)$ ,  $\pi(A)$  engendre  $H_0(K)$ . Pour cela, prenons  $\lambda$  tel que  $\pi(A) = \lambda\pi(c)$ , et appliquons  $H_0(f)$  (en identifiant  $H_0(P)$  et  $\mathbb{A}$ ) :

$$1 = \lambda \cdot \pi \circ f(c)$$

Ainsi  $\lambda \in \mathbb{A}^\times$  car  $\mathbb{A}$  est commutatif et donc  $\pi(c) \in \mathbb{A}\pi(A)$  et donc  $\pi(A)$  engendre  $H_0(K)$ .

Soient maintenant  $A, B \in V(K)$ . On veut montrer  $\pi(A) = \pi(B)$ . Pour cela, d'après ce qu'on a dit juste au dessus, il existe  $\lambda \in \mathbb{A}$  tel que  $\pi(A) = \lambda\pi(B)$ . En appliquant  $H_0(f)$ , on obtient :  $1 = \lambda$  et donc  $\pi(A) = \pi(B)$  et  $A \sim B$  :  $K$  est connexe. □

Le théorème découle directement de ce dernier lemme du fait que le foncteur  $H_0$  préserve les coproduits.

• **Le  $n$ -ème nombre de Betti est indépendant du corps de caractéristique 0 choisi :**

On ajoute en indice le corps considéré pour le calcul de l'homologie et on enlève la précision  $\bullet(K)$  :

$$\dim_{\mathbb{K}} H_{n,\mathbb{K}} = \dim_{\mathbb{K}} C_{n,\mathbb{K}} - \text{Rg}_{\mathbb{K}} \partial_{n,\mathbb{K}} - \text{Rg}_{\mathbb{K}} \partial_{n-1,\mathbb{K}}$$

par le théorème du rang. Il s'agit de montrer que ces trois nombres sont les mêmes que pour  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ . Par définition de  $C_{n,\mathbb{K}}$ , on a  $\dim_{\mathbb{K}} C_{n,\mathbb{K}} = |F_n|$  et cela ne dépend pas du corps.

Ensuite, le rang de  $\partial_{n,\mathbb{K}}$  est le rang  $r$  d'une matrice  $M$  dont les seuls coefficients sont des 1 et des 0. Comme  $\mathbb{K}$  est de caractéristique 0, on peut considérer que  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$  et ainsi  $M$  est aussi à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ . L'algorithme de pivot pour se ramener à la matrice  $J_r$  n'effectuant que des opérations avec des rationnels, le rang de  $M$  sur  $\mathbb{K}$  et sur  $\mathbb{Q}$  est le même et donc  $\text{Rg}_{\mathbb{K}} \partial_{n,\mathbb{K}} = \text{Rg}_{\mathbb{Q}} \partial_{n,\mathbb{Q}}$ . On fait de même pour  $\partial_{n-1}$ .

• **Propriété 9 :** (Résultats sur  $\chi$  et  $P$ )

La première propriété, qui entraîne l'invariance de  $\chi_K$  vis-à-vis de l'homologie, vient simplement de la somme télescopique et du théorème du rang (sur le corps  $\mathbb{Q}$  par exemple) :

$$\begin{aligned} P_K(-1) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \beta_n(K) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n (\dim C_n(K) - \text{Rg } \partial_n - \text{Rg } \partial_{n-1}) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n |F_n(K)| - \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \text{Rg } \partial_n + \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \text{Rg } \partial_n - \text{Rg } \partial_{-1} \\ &= \chi(K) \end{aligned}$$

Ensuite, la deuxième égalité vient d'une traduction sur les nombres de Betti de l'isomorphisme  $H_n(K \sqcup L) \cong H_n(K) \oplus H_n(L)$ , et la quatrième provient de la relation de convolution suivante :

$$\beta_n(K \times L) = \dim \bigoplus_{p+q=n} H_p(K) \otimes H_q(L) = \sum_{p+q=n} \beta_p(K) \beta_q(L)$$

qui est valable si on admet la conjecture sur l'homologie d'un produit géométrique. Les propriétés sur  $\chi$  s'en déduisent immédiatement par évaluation en  $-1$ .

• **Transitivité de la relation d'homotopie entre complexes simpliciaux**

Ce résultat découle directement du lemme suivant :

**Lemme.** (Composition horizontale d'homotopies directes)

On se donne des morphismes simpliciaux :

$$K \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{f'} \end{array} L \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{g'} \end{array} M$$

Si  $f$  et  $f'$  sont homotopes et si  $g$  et  $g'$  sont homotopes, alors  $g \circ f$  et  $g' \circ f'$  sont homotopes.

*Démonstration.* Traitons d'abord le cas où les homotopies en question sont des homotopies directes :

Soient  $F_1, F_2$  deux faces de  $K$  telles que  $F_1 \cup F_2$  soit une face de  $K$ . Comme  $f$  et  $f'$  sont directement homotopes,  $f(F_1) \cup f'(F_2)$  est une face de  $L$ , et comme  $f$  et  $f'$  sont des morphismes simpliciaux,  $f(F_1)$  et  $f'(F_2)$  sont des faces de  $L$ . On utilise enfin que  $g$  et  $g'$  sont directement homotopes pour en déduire que  $g \circ f(F_1) \cup g' \circ f'(F_2)$  est une face. Ainsi,  $g \circ f$  et  $g' \circ f'$  sont directement homotopes.

Pour le cas général, si on a seulement  $f \simeq f'$  et  $g \simeq g'$ , alors on peut trouver deux suites finies de morphismes simpliciaux :

$$f = f_0, \dots, f_p = f' \text{ et } g = g_0, \dots, g_q = g'$$

telles que  $f_k$  et  $f_{k+1}$  sont directement homotopes et  $g_k$  et  $g_{k+1}$  sont directement homotopes.

Si par exemple  $p \leq q$ , on peut supposer  $p = q$  quitte à poser pour  $k > p$  :  $f_k = f'$ . On a toujours  $f_k$  directement homotope à  $f_{k+1}$  par réflexivité de l'homotopie directe.

En composant, on obtient pour tout  $k$  que  $g_k \circ f_k$  et  $g_{k+1} \circ f_{k+1}$  sont directement homotopes d'après le cas particulier, et donc :

$$g \circ f \simeq g' \circ f'$$

□

On peut alors montrer que la relation d'homotopie entre complexes simpliciaux est transitive : Supposons  $K \simeq L$  et  $L \simeq M$ . Il existe des équivalences d'homotopie :

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{g} & M \\ & \xleftarrow{f'} & & \xleftarrow{g'} & \\ & & L & & M \end{array}$$

On a :  $f' \circ f \simeq \text{id}_K$ ,  $f \circ f' \simeq \text{id}_L$ ,  $g' \circ g \simeq \text{id}_L$ , et  $g \circ g' \simeq \text{id}_M$ . Par stabilité de la relation d'homotopie avec la composition :

$$f' \circ g' \circ g \circ f \simeq \text{id}_K$$

et :

$$g \circ f \circ f' \circ g' \simeq \text{id}_M$$

ce qui conclut.

• **Propriété 13** : (Homotopie, coproduit et produit naturel)

Comme plus haut, il suffit de le montrer pour les homotopies directes. On se donne alors des morphismes simpliciaux :

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{f} & L \\ & \xleftarrow{f'} & \\ M & \xrightarrow{g} & N \\ & \xleftarrow{g'} & \end{array}$$

tels que  $f$  et  $f'$  sont directement homotopes et  $g$  et  $g'$  aussi.

Notons  $K \sqcup M \xrightarrow{f+g} L \sqcup N$ ,  $K * M \xrightarrow{f*g} L * N$ , etc. les applications canoniques.

Montrons que  $f + g$  et  $f' + g'$  sont directement homotopes : si  $F_1, F_2$  sont deux faces de  $K \sqcup M$  telles que  $F_1 \cup F_2$  est une face, puisque  $F(K \sqcup M) = F(K) \sqcup F(M)$ , ou bien  $F_1 \cup F_2 \in F(K)$  ou bien  $F_1 \cup F_2 \in F(M)$ . Si par exemple  $F_1 \cup F_2 \in F(K)$ , alors les faces  $F_1$  et  $F_2$  sont des faces de  $K$  et on conclut directement grâce au fait que  $f$  et  $f'$  sont directement homotopes.

Montrons à présent que  $f * g$  et  $f' * g'$  sont directement homotopes : si  $F_1, F_2$  sont deux faces de  $K * M$  telles que  $F_1 \cup F_2$  est une face, notons  $H := f * g(F_1) \cup f' * g'(F_2)$ . Il s'agit de montrer que  $H$  est une face de  $L * N$ , c'est à dire que  $\pi_L(H)$  et  $\pi_N(H)$  sont des faces :

$$\pi_L(H) = f \circ \pi_K(F_1) \cup f' \circ \pi_K(F_2)$$

Or  $\pi_K(F_1)$  et  $\pi_K(F_2)$  sont des faces de  $K$  et leur réunion  $\pi_K(F_1 \cup F_2)$  aussi, donc  $\pi_L(H)$  est une face. En raisonnant de même avec  $\pi_N(H)$ , on obtient l'homotopie directe voulue.

Les résultats annoncés sur les complexes simpliciaux en découlent directement par functorialité de  $\sqcup$  et  $*$ .

• **Propriété 14** : (Caractérisation de la contractilité)

La contractilité de  $K$  se traduit par l'existence de deux équivalences d'homotopie :

$$\begin{array}{ccc}
& \circlearrowright^{\underline{0}} & \\
K & & \Delta_0 \\
& \circlearrowleft^{\gamma} &
\end{array}$$

qui sont en fait des applications constantes. La condition  $\underline{0} \circ \gamma \simeq \text{id}_{\Delta_0}$  est toujours vraie (on a même une égalité), et seule la condition  $\gamma \circ \underline{0} \simeq \text{id}_K$  est vraiment nécessaire. Or si on note  $v$  le sommet  $\gamma(0)$ , on retrouve bien la condition énoncée dans la propriété.

• **Théorème 15** : (Condition suffisante de contractilité et contractilité des simplexes)

On utilise le lemme suivant, adapté de [3] :

**Lemme.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles ordonnés, et :

$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} F$$

deux applications croissantes telles que pour tout  $x \in E$  on ait  $f(x) \leq g(x)$ . Alors les morphismes simpliciaux  $\mathcal{K}f$  et  $\mathcal{K}g$  sont (directement) homotopes.

*Démonstration.* Soient  $F_1, F_2$  des faces de  $\mathcal{K}E$ , c'est à dire des parties totalement ordonnées de  $E$ . On suppose que  $F_1 \cup F_2$  est également totalement ordonnée, et on va montrer que  $f(F_1) \cup g(F_2)$  l'est aussi. Soient  $x, y \in f(F_1) \cup g(F_2)$ . Si  $x, y \in f(F_1)$ , alors en prenant  $u$  un antécédent de  $x$  et  $v$  un antécédent de  $y$  dans  $F_1$ ,  $u$  et  $v$  sont comparables car  $F_1$  est totale, et par croissance de  $f$ ,  $x$  et  $y$  sont comparables. Le cas de  $F_2$  et  $g$  est similaire, et si maintenant  $x = f(u) \in f(F_1)$  et  $y = g(v) \in g(F_2)$ , alors comme  $u, v \in F_1 \cup F_2$  qui est totale,  $u$  et  $v$  sont comparables. Si par exemple  $u \leq v$ , alors  $x = f(u) \leq f(v) \leq g(v) = y$ . Dans tous les cas,  $x$  et  $y$  sont comparables et  $f(F_1) \cup g(F_2)$  est donc une face de  $\mathcal{K}F$ . Il en résulte que  $f$  et  $g$  sont directement homotopes. □

On peut alors prouver le théorème : Notons  $M$  le plus grand élément de  $E$ . D'après la propriété vue plus haut, il suffit de montrer que l'identité de  $\mathcal{K}E$  est homotope au morphisme simplicial  $\underline{M}$  qui envoie tous les sommets sur  $M$ . C'est clair d'après le lemme, car pour tout  $x \in E$ , on a  $x \leq M$ . Le fait que  $\Delta_n$  soit contractile en résulte directement car  $\Delta_n \cong \mathcal{K}\{0, \dots, n\}$ .

• **Propriété 17** : (Relation d'homotopie entre morphismes de complexes de chaînes)

C'est une relation d'équivalence :

Tout morphisme  $f$  est homotope à lui-même en prenant l'application nulle comme homotopie, si  $\alpha$  est une homotopie entre  $f$  et  $g$ ,  $-\alpha$  en est une entre  $g$  et  $f$ , et si  $\alpha$  est une homotopie entre  $f$  et  $g$  et  $\beta$  une entre  $g$  et  $h$ , alors  $\alpha + \beta$  en est une entre  $f$  et  $h$  :

$$\partial(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)\partial = \partial\alpha + \alpha\partial + \partial\beta + \beta\partial = g - f + h - g = h - f$$

La stabilité par combinaisons linéaires découle directement de la bilinéarité de  $\circ$ .

• **Propriété 18** : (Composition horizontale)

C'est un calcul direct qui utilise le fait que  $f, f', g, g'$  commutent aux bords :

$$\begin{aligned}
g'f' - gf &= (g' - g)f' + g(f' - f) \\
&= \partial\beta f' + \beta\partial f' + g\partial\alpha + g\alpha\partial \\
&= \partial(\beta f' + g\alpha) + (\beta f' + g\alpha)\partial
\end{aligned}$$

Notons que les indices qu'il faudrait écrire ne sont pas forcément les mêmes d'une ligne à l'autre mais on est assurés par la bonne définition des composées ci-dessus qui ne laisse pas le choix aux indices.

• **Théorème 20** : (Invariance homotopique de l'homologie, cas algébrique)

Supposons que l'on ait une homotopie  $\alpha$  entre  $f$  et  $g$ . On a donc  $g - f = \partial\alpha + \alpha\partial$ , et pour tout  $x \in \text{Ker } \partial$ , on a :

$$g(x) - f(x) = \partial\alpha(x)$$

qui est nul en homologie.

Ensuite, si  $C$  et  $D$  sont homotopes, on dispose d'équivalences d'homotopies  $C \xrightarrow{f} D$  et  $D \xrightarrow{g} C$  et on a  $fg \simeq \text{id}$  donc en homologie  $H_n(f)H_n(g) = \text{id}$  par functorialité et par ce qu'on vient d'établir sur les morphismes et de même  $H_n(g)H_n(f) = \text{id}$ , et donc  $H_n(f)$  et  $H_n(g)$  sont des isomorphismes.

• **Théorème 21** : (Invariance homotopique de l'homologie simpliciale)

On utilise un lemme calculatoire :

**Lemme.** Soit  $K$  un complexe simplicial. On rappelle que  $\Delta_1$  est le simplexe de dimension 1, et on note les points de  $\Delta_1 * K$  ainsi :  $v^i := (i, v)$  pour  $v$  un sommet de  $K$ . Les morphismes simpliciaux  $\iota^0$  et  $\iota^1$ , de  $K$  vers  $\Delta_1 * K$  qui vérifient  $\iota^i(v) := v^i$  induisent des morphismes de complexes de chaînes homotopes :

$$\iota_*^0 \simeq \iota_*^1$$

*Démonstration.* On souhaite donc définir une homotopie algébrique :

$$C_*(K) \xrightarrow{\eta} C_*(\Delta_1 * K)$$

qui vérifie  $\iota_*^1 - \iota_*^0 = \partial\eta + \eta\partial$ .

Pour cela, ordonnons  $K$  de sorte à ce que chaque face soit totalement ordonnée, et posons pour une orientation de face  $o = (v_0, \dots, v_n) \in F_n(K)$ , où  $v_0 < \dots < v_n$  et pour tout entier  $0 \leq k \leq n$  :

$$o_k := (v_0^0, \dots, v_k^0, v_k^1, \dots, v_n^1) \in C_{n+1}(\Delta_1 * K)$$

C'est clairement une orientation de face de  $\Delta_1 * K$  car toute partie d'une face est une face. On posera  $w_i$  le  $i$ -ème sommet dans la présentation ordonnée de  $o_k$  ci-dessus, pour  $0 \leq i \leq n+1$ .

Posons à présent :

$$\eta_n(o) := \sum_{k=0}^n (-1)^k o_k$$

Par linéarité,  $\eta_n$  s'étend en une application linéaire  $C_n(K) \xrightarrow{\eta_n} C_{n+1}(\Delta_1 * K)$  puisque les orientations de la forme  $(v_0, \dots, v_n)$  avec  $v_0 < \dots < v_n$  forment une base de  $C_n(K)$ . Il reste à vérifier que  $\eta$  est une homotopie algébrique, ce qu'il suffit de vérifier sur les orientations de faces, on garde donc  $o$  comme ci-dessus.

On a :

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}\eta_n(o) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \sum_{i=0}^{n+1} (o_k \setminus w_i) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} \left( v_0^0, \dots, \widehat{v_i^0}, \dots, v_k^0, v_k^1, \dots, v_n^1 \right) \\
&\quad + \sum_{k=0}^n \sum_{i=k+1}^{n+1} (-1)^{k+i} \left( v_0^0, \dots, v_k^0, v_k^1, \dots, \widehat{v_{i-1}^1}, \dots, v_n^1 \right) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k (-1)^{k+i} \left( v_0^0, \dots, \widehat{v_i^0}, \dots, v_k^0, v_k^1, \dots, v_n^1 \right) \\
&\quad - \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n (-1)^{k+i} \left( v_0^0, \dots, v_k^0, v_k^1, \dots, \widehat{v_i^1}, \dots, v_n^1 \right)
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
\eta_{n-1}\partial_n(o) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \eta_{n-1}(v_0 \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n) \\
&= \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{i-1} (-1)^{i+k} \left( v_0^0, \dots, v_k^0, v_k^1, \dots, \widehat{v_i^1}, \dots, v_n^1 \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^{n-1} (-1)^{i+k} \left( v_0^0, \dots, \widehat{v_i^0}, \dots, v_{k+1}^0, v_{k+1}^1, \dots, v_n^1 \right) \\
&\quad \text{car } v_0 < \dots < v_{i-1} < v_{i+1} < \dots < v_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k+1}^n (-1)^{i+k} \left( v_0^0, \dots, v_k^0, v_k^1, \dots, \widehat{v_i^1}, \dots, v_n^1 \right) \\
&\quad - \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{i+k} \left( v_0^0, \dots, \widehat{v_i^0}, \dots, v_k^0, v_k^1, \dots, v_n^1 \right)
\end{aligned}$$

On somme ces deux quantités :

$$\begin{aligned}
\partial\eta(o) + \eta\partial(o) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+k} \left( v_0^0, \dots, \widehat{v_k^0}, v_k^1, \dots, v_n^1 \right) \\
&\quad + (-1)^{0+0} \left( \widehat{v_0^0}, v_0^1, \dots, v_n^1 \right) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+k} \left( v_0^0, \dots, v_k^0, \widehat{v_{k+1}^1}, \dots, v_n^1 \right) \\
&\quad - (-1)^{n+n} \left( v_0^0, \dots, v_n^0, \widehat{v_n^1} \right) \\
&= \iota_*^1(o) - \iota_*^0(o) + \\
&\quad \sum_{k=1}^n \left( \left( v_0^0, \dots, \widehat{v_k^0}, v_k^1, \dots, v_n^1 \right) - \left( v_0^0, \dots, v_{k-1}^0, \widehat{v_{k-1}^1}, \dots, v_n^1 \right) \right) \\
&= \iota_*^1(o) - \iota_*^0(o)
\end{aligned}$$

Ceci confirme que  $\eta$  est une homotopie algébrique entre  $\iota_*^0$  et  $\iota_*^1$ . □

Montrons alors le résultat voulu dans le cas où  $f$  et  $g$  sont directement homotopes, le résultat général en sera une conséquence directe. Ici, on va se servir de la première définition de l'homotopie directe : l'application  $\Delta_1 * K \xrightarrow{\alpha} L$  qui vérifie  $\alpha(0, \bullet) = f$  et  $\alpha(1, \bullet) = g$  est un morphisme simplicial. Par définition de  $\alpha$ , le diagramme de morphismes simpliciaux suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} K & & \\ \iota^0 \downarrow & \searrow f & \\ \Delta_1 * K & \xrightarrow{\alpha} & L \\ \iota^1 \uparrow & \nearrow g & \\ K & & \end{array}$$

On applique le foncteur  $C_*$  :

$$\begin{array}{ccc} C_*(K) & & \\ \iota_*^0 \downarrow & \searrow f_* & \\ C_*(\Delta_1 * K) & \xrightarrow{\alpha_*} & C_*(L) \\ \iota_*^1 \uparrow & \nearrow g_* & \\ C_*(K) & & \end{array}$$

On a ici  $\alpha_* \simeq \alpha_*$  et d'après le lemme précédent  $\iota_*^0 \simeq \iota_*^1$ , donc par stabilité de  $\simeq$  par rapport à la composition et par commutativité du diagramme :

$$f_* \simeq g_*$$

• **Propriété 22** : (Homologie d'un complexe contractile)

D'après l'invariance homotopique de l'homologie, il suffit de voir que l'homologie du point est donnée par  $H_0 \cong \mathbb{A}$  et  $H_n = 0$  pour  $n \neq 0$ , ce qui est clair car le point est connexe, non vide et de dimension 0.

• **Le cône  $\widehat{K}$  est contractile** :

D'après la caractérisation des complexes contractiles donnée plus haut, il suffit de montrer que le morphisme simplicial :

$$\underline{\omega} : \begin{cases} \widehat{K} \longrightarrow \widehat{K} \\ v \mapsto \omega \end{cases}$$

est homotope à l'identité de  $\widehat{K}$ . En effet, si  $F_1, F_2$  sont deux faces de  $\widehat{K}$  dont la réunion est une face, alors  $\underline{\omega}(F_1) \cup \text{id}(F_2) = F_2 \cup \{\omega\}$  est une face de  $\widehat{K}$ , ce qui achève la preuve (on a même une homotopie directe ici).

• **Théorème 24** (Suite exacte longue de Mayer-Vietoris)

D'abord, il est immédiat que  $f$  et  $g$  sont des morphismes de complexes de chaînes en utilisant que les inclusions  $\iota^A$  et  $\iota^B$  sont des morphismes simpliciaux. Ensuite,  $f$  est injective car si  $f(c) = 0$ , alors en particulier  $c = 0$ . Puis  $g$  est surjective car  $C_n(K)$  est engendré par les orientations de faces de dimension  $n$  (pour  $n \geq 0$  du moins, sinon il n'y a rien à dire de toute façon) et une face de dimension  $n$  de  $K$  est soit une face de  $A$  soit une face de  $B$  ou les deux puisque on a un recouvrement.

De plus on a clairement  $gf = 0$ . Enfin si  $(c, d) \in \text{Ker } g_n$  pour  $c \in C_n(A), d \in C_n(B)$ , alors  $c + d = 0$  donc  $c \in C_n(B)$  et  $c \in C_n(A)$ , et en décomposant dans une base associée à un ordre choisi sur  $K$ , toutes les faces apparaissant dans la décomposition de  $c$  sont des faces de  $A$  et de  $B$  donc  $c \in C_n(A \cap B)$  et de même  $d \in C_n(A \cap B)$ . Comme  $d = -c$ , on obtient  $f_n(c) = (c, d)$  et  $(c, d) \in \text{Im } f_n$ .

La suite courte étant exacte, elle induit une suite exacte longue en homologie (on l'admet, ce n'est pas difficile à vérifier mais la preuve présente peu d'intérêt), et il reste simplement à utiliser le fait que  $H_n(C_*(A) \oplus C_*(B))$  est canoniquement isomorphe à  $H_n(A) \oplus H_n(B)$ .

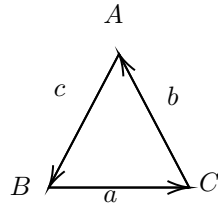
• **Théorème 25** (Homologie des sphères simpliciales)

On a d'abord besoin du calcul de l'homologie d'un cercle :

**Lemme.** (Homologie du cercle)

On a  $H_0(\mathbb{S}^1) \cong H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{A}$  et tous les autres modules d'homologie de  $\mathbb{S}^1$  sont nuls.

*Démonstration.* Le cercle étant connexe et de dimension 1, la seule chose nouvelle ici est le calcul de  $H_1$ . Choisissons une base de  $C_0$  et  $C_1$  (on abrège  $C_*(\mathbb{S}^1)$  en  $C_*$ ) :



Il faut comprendre dans ce schéma que  $a = (B, C)$ ,  $b = (C, A)$  et  $c = (A, B)$ . Le complexe de chaînes est le suivant :

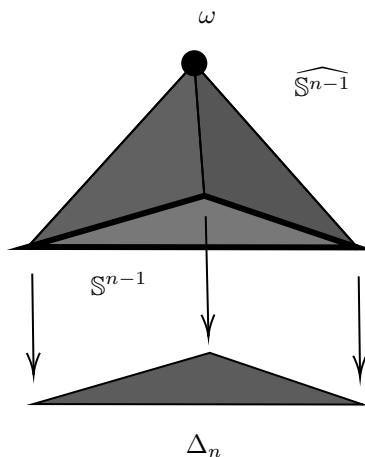
$$0 \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

et la matrice de  $\partial_1$  dans les bases  $(a, b, c)$  et  $(A, B, C)$  est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le noyau est engendré par  $(1, 1, 1)$ . On en déduit  $\text{Ker } \partial_1 = \mathbb{A}(a + b + c)$  et  $H_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{A}(a + b + c) \cong \mathbb{A}$  car  $C_1$  est libre et donc  $a + b + c$  n'est pas un élément de torsion.  $\square$

On calcule ensuite l'homologie de  $\mathbb{S}^n$  par récurrence sur  $n$ , l'initialisation provenant du lemme ci-dessus. Pour  $n \geq 2$ , remarquons que  $\widehat{\Delta_{n+1}}$  est simplicialement isomorphe au cône de  $\Delta_n$  (on les identifie) et ainsi on peut recouvrir  $\mathbb{S}^n$  par  $\Delta_n$  et  $\widehat{\mathbb{S}^{n-1}}$ , et l'intersection de ces sous-complexes est  $\mathbb{S}^{n-1}$ .



On obtient la suite exacte courte suivante (d'après la section précédente) :

$$0 \longrightarrow C_*(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow C_*(\Delta_n) \oplus C_*(\widehat{\mathbb{S}^{n-1}}) \longrightarrow C_*(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0$$

On applique alors le théorème vu plus haut sur la suite exacte longue de Mayer-Vietoris pour obtenir dans un premier temps, puisque les cônes et les simplexes sont contractiles et  $n \geq 2$  :

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow H_n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Ce qui montre que  $H_n(\mathbb{S}^n) \cong H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{A}$ . Ensuite, pour tout  $k \in \{2, \dots, n-1\}$ , on a :

$$0 \longrightarrow H_k(\mathbb{S}^n) \longrightarrow H_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow 0$$

car  $k-1 \geq 1$ . Ainsi  $H_k(\mathbb{S}^n) \cong H_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) = 0$  car  $1 \leq k-1 < n-1$ . Enfin, il reste le  $H_1$  que l'on obtient avec la fin de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{f} \mathbb{A} \xrightarrow{g} \mathbb{A}^2 \xrightarrow{h} \mathbb{A} \longrightarrow 0$$

On a donné des noms aux applications pour faciliter la discussion.

$h$  n'est pas injective : en effet, si on pose  $\lambda := h(1, 0)$  et  $\mu := h(0, 1)$ , alors  $h(\mu, -\lambda) = 0$  et soit  $(\mu, -\lambda) = 0$  auquel cas  $h$  n'est pas injective puisque  $\mathbb{A} \neq 0$ , soit  $(\mu, -\lambda) \neq 0$  auquel cas  $h$  n'est pas injective non plus car  $h(\mu, -\lambda) = 0$ .

Ainsi  $\text{Ker } h \neq 0$  et donc  $g$  n'est pas nulle par exactitude. On en déduit que  $g$  est injective puisque  $g(1) \neq 0$  et  $\mathbb{A}$  est supposé **intègre**. Ainsi,  $\text{Ker } g = 0$  et donc  $f$  est l'application nulle et donc  $0 \longrightarrow H_1(\mathbb{S}^n)$  est surjective par exactitude, et  $H_1(\mathbb{S}^n)$  est le module nul. Ceci achève la récurrence.

#### • Impossibilité du pavage des ballons :

On raisonne par l'absurde, en supposant qu'un tel pavage existe, et on découpe les mailles du pavage en triangles (comme sur le schéma) de sorte à obtenir un complexe simplicial  $K$ . On utilise alors la première définition que l'on a donnée de la caractéristique d'Euler, qui ici vaut 2 :

$$\chi = |F_0(C)| - |F_1(C)| + |F_2(C)|$$

Pour le pavage carré, en notant  $\ell$  le nombre de carrés, on obtient donc :

$$\chi = \ell(1 - 3 + 2) = 0$$

qui est différent de 2, c'est absurde. En effet, il y a 4 sommets par carré mais chaque sommet est dans 4 carrés, et il y a 5 segments par carré mais 4 d'entre eux sont dans 2 carrés et le dernier est dans un seul carré, soit  $4/2 + 1 = 3$  segments par carré.

Pour le pavage hexagonal on trouve la même absurdité :

$$\chi = \ell(3 - 9 + 6) = 0$$

où  $\ell$  est le nombre d'hexagones.

## 6.2 Résultats et détails du programme réalisé

Voici quelques complexes simpliciaux dont l'homologie a été calculée sur  $\mathbb{Z}$  algorithmiquement, c'est à dire en dressant toutes les matrices des morphismes de bords et en utilisant la méthode expliquée précédemment.

	Homologie dans $\mathbb{Z}$	Polynôme de Poincaré	Caractéristique d'Euler
<b>Sphère</b> $\mathbb{S}^n$ pour $n \leq 8$	$H_0, H_n : \mathbb{Z}$	$X^n + 1$	$\begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ 2 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$
<b>Tore</b> $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ pour $n \leq 3$ (le tore $\mathbb{T}^3$ a 27 sommets et 324 faces de dimension 2 donc le calcul est long)	$H_k : \mathbb{Z}^{\binom{n}{k}}$	$(X + 1)^n$	0
<b>Ruban de Möbiüs</b> (étant homotope à un cercle, son homologie n'est pas passionnante)	$H_0, H_1 : \mathbb{Z}$	$X + 1$	0
<b>Plan projectif réel</b> $\mathbb{R}P^2$ On remarque qu'il y a de la torsion, et c'est intuitif car le plan projectif est lui même tordu	$H_0 \quad \mathbb{Z}$ $H_1 \quad \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	1	1
<b>Somme connexe de <math>n</math> tores de dimension 2</b> pour $n \leq 10$	$H_0 \quad \mathbb{Z}$ $H_1 \quad \mathbb{Z}^{2n}$ $H_2 \quad \mathbb{Z}$	$X^2 + 2nX + 1$	$2(1 - n)$
<b>Bouteille de Klein</b> réalisée comme la somme connexe de deux plans projectifs réels	$H_0 \quad \mathbb{Z}$ $H_1 \quad \mathbb{Z} + \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$X + 1$	0

Notons d'ailleurs que les calculs d'homologie dans  $\mathbb{Z}$  sont bien plus longs que le simple calcul du polynôme de Poincaré (on parvient en un temps raisonnable à calculer le polynôme de Poincaré de  $\mathbb{T}^4$ ).

Détaillons enfin comment les produits géométriques sont construits par le programme.

Les complexes simpliciaux ordonnés sont encodés en mémoire en numérotant les sommets et en stockant **au moins** les faces **maximales** (il n'est pas exclu qu'il y en ait d'autres qui soient stockées) comme des ensembles d'indices de sommets.

La question qu'on se pose dans ce paragraphe est celle de concevoir un algorithme assez efficace qui calcule la représentation en mémoire du produit géométrique de deux complexes simpliciaux ordonnés  $K$  et  $L$ .

Un **algorithme naïf** (et exponentiel en le nombre de sommets de  $K \times L$ ) est de parcourir la liste de toutes les parties de  $V(K) \times V(L)$  et de vérifier pour chaque partie  $F$  si  $\pi_K(F)$  est bien une face de  $K$ ,  $\pi_L(F)$  est bien une face de  $L$ , et en plus si  $F$  est totalement ordonnée pour l'ordre produit. Cette solution explose dès que l'on souhaite multiplier des petits complexes de dimension 1 ou 2 : il faut trouver autre chose.

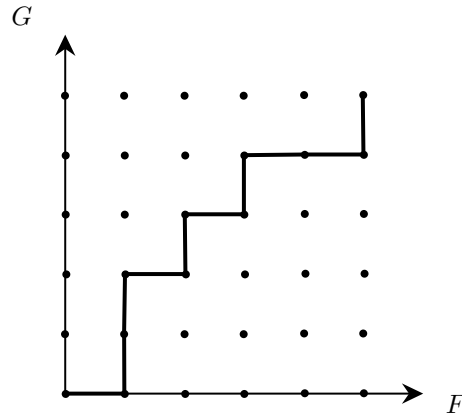
Pour cela, on découpe le problème en sous problèmes via :

$$F(K \times L) = \bigsqcup_{F \in F(K), G \in F(L)} \mathcal{F}_{F,G}$$

où  $\mathcal{F}_{F,G} = \{H \in F(K \times L) \mid \pi_K(H) = F \text{ et } \pi_L(H) = G\}$  est l'ensemble des faces du produit qui se projettent sur  $F$  et sur  $G$ .

Les faces maximales de  $K \times L$  se projettent sur des faces maximales de  $K$  et de  $L$ , et donc il suffit de calculer les  $\mathcal{F}_{F,G}$  pour  $F$  et  $G$  maximales.

Fixons donc  $F$  et  $G$  deux faces maximales de  $K$  et  $L$  respectivement, et numérotons leurs sommets :  $v_0 < \dots < v_p$  sont les sommets de  $F$  et  $w_0 < \dots < w_q$  ceux de  $G$ . Une face maximale de  $\mathcal{F}_{F,G}$  peut être vue comme un chemin (une suite de points) strictement croissant dans l'ensemble ordonné  $\{0, \dots, p\} \times \{0, \dots, q\}$ , qui va de  $(0, 0)$  à  $(p, q)$  et qui visite  $p + q + 1$  points :



De tels chemins peuvent être construits récursivement, et on va ici brièvement décrire l'algorithme en donnant une représentation simple du problème. On cherche une fonction :

```
liste_chemins(p,q)
```

qui étant donnés deux entiers naturels  $p$  et  $q$  retourne la liste de tous les chemins  $(x_i, y_i)_{0 \leq i \leq t}$  de toutes tailles, strictement croissants pour l'ordre produit, qui visitent  $p + q + 1$  points, ce qui impose d'ailleurs les valeurs de  $x_0, y_0, x_t$  et  $y_t$ . Observons que chaque déplacement du chemin est soit horizontal d'une case, soit vertical d'une case, on appellera ces chemins respectivement  $\rightarrow$  et  $\uparrow$ . Tout autre déplacement contredit les conditions des chemins (il est facile de s'en convaincre).

Avec ceci, on peut facilement écrire notre fonction : débarassons nous déjà des **cas de base**. Si  $p = 0$ , il n'y a qu'un chemin : une succession de  $\uparrow$ . Si  $q = 0$ , c'est pareil, avec une succession de  $\rightarrow$ . On pourrait même adapter la récursion pour n'avoir que le cas  $(0, 0)$  en cas de base, mais peu importe.

Ensuite, si  $p \geq 1$  et  $q \geq 1$ , il y a **deux types de chemins à lister** : pour ceux qui se terminent par un  $\rightarrow$ , on complète les chemins de :

```
liste_chemins(p-1,q)
```

en y ajoutant le déplacement  $\rightarrow$ . Enfin, pour ceux qui se terminent par  $\uparrow$  on va utiliser l'appel :

```
liste_chemins(p,q-1)
```

L'algorithme termine clairement avec  $O(p + q)$  appels et retourne bien la liste que l'on voulait. On peut aussi l'optimiser en mémorisant les résultats.

### 6.3 Quelques images faites par le programme

Présentons enfin quelques images faites par le rendu en 3 dimensions du programme réalisé :

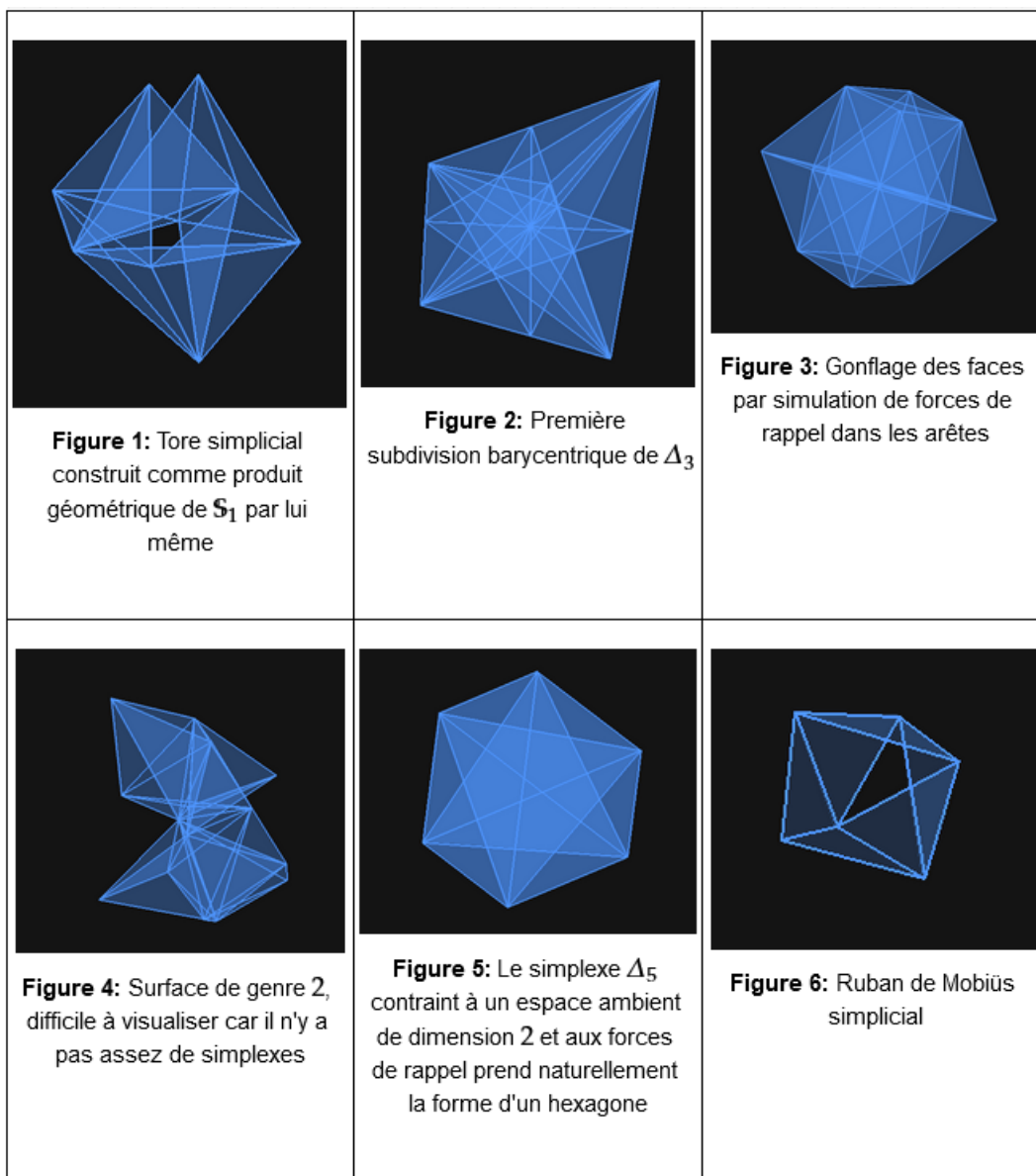


FIGURE 1 – Quelques images

### Références

- [1] Daniel Lines Alain Jeanneret. *Invitation à la Topologie Algébrique, Tome 1.*
- [2] Michel Coste. Algèbre linéaire sur les entiers. URL : <https://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/alglinent.pdf>.

- [3] Guillot. Complexes simpliciaux chapitre 1. URL : <http://irma.math.unistra.fr/~guillot/cours/topo-M2-chap1.pdf>.
- [4] Guillot. Complexes simpliciaux chapitre 2. URL : <http://irma.math.unistra.fr/~guillot/cours/topo-M2-chap2.pdf>.
- [5] Rachel Taillefer Julien Bichon. Algèbre homologique. URL : <https://lmbp.uca.fr/~taillefer/polys/Cours-M2-AlgebreHomologique-Bichon-Taillefer.pdf>.